

## LINEARE SYSTEME VON DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir betrachten nun (gekoppelte) lineare Systeme von Differentialgleichungen. Im Allgemeinen können diese natürlich von beliebig hoher Dimension sein, wir beschränken uns aber für die Übersichtlichkeit in diesem Kurs auf zwei Dimensionen. Ein lineares System von zwei Differentialgleichungen erster Ordnung kann notiert werden durch

$$\dot{x}(t) = A \cdot x(t) + b(t),$$

wobei wir ausgeschrieben das folgende System meinen:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \end{bmatrix}.$$

Diese Matrix-Vektor-Gleichung schreibt das folgende System kompakter:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + b_1(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + b_2(t). \end{cases}$$

Der Term  $b(t)$  heisst *inhomogener Teil* oder auch *Störterm* des Systems. Er beschreibt äussere Einflüsse oder Anregungen, die nicht aus dem Zustand  $x(t)$  selbst resultieren. Wichtig ist dabei, dass  $b(t)$  im Allgemeinen zeitabhängig sein kann.

Anfangsbedingungen werden vorgegeben, indem man den Zustandsvektor  $x(t)$  zu einem festen Zeitpunkt, etwa  $t = 0$ , festlegt.

Wir haben unser Problem nun mit Hilfe der linearen Algebra formuliert und können somit die dort erarbeitete Theorie nutzen. Im Allgemeinen ist unsere Koeffizientenmatrix  $A$  nicht notwendigerweise diagonalisierbar, in der Praxis aber häufig. Daher nehmen wir dies im Folgenden an.<sup>1</sup> Unter dieser Annahme können wir  $A$  mithilfe einer Basis aus Eigenvektoren diagonalisieren und das System explizit lösen.

Sei  $v$  ein Eigenvektor der Koeffizientenmatrix  $A$  zum Eigenwert  $\lambda$ , das heisst

$$Av = \lambda v.$$

Dann betrachten wir Lösungen der Form

$$x(t) = e^{\lambda t} v.$$

Setzt man diesen Ansatz in das zugehörige homogene System

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

ein, so erhält man

$$\lambda e^{\lambda t} v = A e^{\lambda t} v,$$

was genau der Eigenwertgleichung entspricht. Damit gilt: Zu jedem Eigenwert  $\lambda$  von  $A$  mit zugehörigem Eigenvektor  $v$  existiert eine Lösung des homogenen Systems der Form  $x(t) = e^{\lambda t} v$ .

Ist die Matrix  $A$  diagonalisierbar und besitzt zwei linear unabhängige Eigenvektoren  $v_1, v_2$  zu den Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$ , so bilden diese eine Basis von  $\mathbb{R}^2$ . Die allgemeine Lösung des homogenen Systems lautet dann

$$x_h(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2,$$

wobei die Konstanten  $c_1, c_2$  durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden.

---

<sup>1</sup>Ist  $A$  nicht diagonalisierbar, so lässt sich das System im allgemeinen Fall mithilfe des *Matrixexponentials* lösen.

Wir betrachten nun das inhomogene System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t).$$

In diesem Fall setzt sich die allgemeine Lösung aus zwei Anteilen zusammen:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

wobei  $x_h(t)$  eine Lösung des zugehörigen homogenen Systems und  $x_p(t)$  eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems ist. Die Bestimmung von  $x_p(t)$  hängt dabei wesentlich von der Struktur des Störtermes  $b(t)$  ab. Typische Verfahren sind Ansatzmethoden oder die Variation der Konstanten.

### Beispiel

Betrachte das gekoppelte lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + 2x_2(t).\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet das System

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix  $A$  sind

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1,$$

mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Damit ergibt sich die allgemeine Lösung als

$$x(t) = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

wobei  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$  Konstanten sind.

### Beispiel 2: Inhomogenes lineares System

Betrachte das gekoppelte lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + e^{-t}.\end{aligned}$$

In Matrixschreibweise lautet das System

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + b(t), \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Die Eigenwerte der Matrix  $A$  sind

$$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1,$$

mit zugehörigen Eigenvektoren

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung des homogenen Systems ist

$$x_h(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Eine spezielle Lösung des inhomogenen Systems erhält man durch den Ansatz

$$x_p(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix},$$

woraus durch Einsetzen das System

$$\begin{aligned} -a &= 2a + b \\ -b &= b + 1 \end{aligned}$$

folgt. Die Lösung davon ist  $a = 1/6$  und  $b = -1/2$ . Damit ist

$$x_p(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet somit

$$x(t) = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-t} \begin{bmatrix} \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

## Alternative Lösung des homogenen Systems durch Umwandlung in eine DGL 2. Ordnung

Betrachte das System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) + 2x_2(t). \end{aligned}$$

Das Ziel ist es nur eine DGL in  $x_1$  zu erhalten und alle  $x_2$  zu eliminieren. Wir leiten die erste Gleichung noch einmal ab, um eine DGL zweiter Ordnung zu erhalten

$$\ddot{x}_1(t) = 2\dot{x}_1(t) + \dot{x}_2(t).$$

Hier können wir die zweite DGL einsetzen für  $\dot{x}_2(t)$ . Wir erhalten nach einsetzen:

$$\ddot{x}_1(t) = 2\dot{x}_1(t) + x_1(t) + 2x_2(t).$$

Jetzt können wir mithilfe der ersten Gleichung  $x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 2x_1(t)$  schreiben und erhalten die DGL zweiter Ordnung nur in  $x_1$ :

$$\ddot{x}_1(t) - 4\dot{x}_1(t) + 3x_1(t) = 0.$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 1.$$

Die Lösung für  $x_1(t)$  ist

$$x_1(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^t.$$

Aus  $x_2(t) = \dot{x}_1(t) - 2x_1(t)$  folgt

$$x_2(t) = (3c_1 e^{3t} + c_2 e^t) - 2(c_1 e^{3t} + c_2 e^t) = c_1 e^{3t} - c_2 e^t.$$

Die allgemeine Lösung des Systems lautet somit

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Dies ist dieselbe Lösung, die wir auch durch die Eigenwert-Methode erhalten haben!